Types de nombres

Ensembles de nombres fondamentaux :

- Nombres entiers naturels (N)
- Nombres entiers relatifs (Z)
- Nombres rationnels (Q) parmi lesquelles les nombres décimaux (D)
- Nombres irrationnels

➔ **Tous ces ensembles forment un grand ensemble celui des nombres réels** (R)

I. Nombres entiers naturels

➢ **Définition ordinale :**

- 0 est un nombre entier naturel
- Tout entier naturel a un successeur
- 0 n'est le successeur d'aucun entier naturel
- Deux nombres entiers naturels ayant le même successeur sont égaux

➢ **Définition cardinale** : manière de mettre ensemble certaines collections (mettre ensembles les collections ayant le même nombre d'objets)

II. Nombres entiers relatifs

➢ **Définition :** Les nombres négatifs et les nombres positifs sont des entiers relatifs.

Propriété : Tout nombre entier naturel est un nombre entier relatif. Ainsi, si a est un nombre entier naturel, on peut écrire $a = +a$.

III. Nombres rationnels

➢ **Définition :** nombre pouvant s'écrire sous la forme d'une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont des nombres entiers et le **dénominateur non nul.**

Propriété : Tout nombre entier est rationnel ainsi, si a est un nombre entier on peut écrire $a = \frac{a}{1}$

IV. Nombres décimaux

➢ **Définition 1** : nombre pouvant s'écrire sous la forme d'une fraction à termes entiers dont le dénominateur est une puissance de 10

➢ **Définition 2** : nombre pouvant s'écrire sous la forme d'une fraction irréductible à termes entiers dont le dénominateur est le produit d'une puissance de 2 par une puissance de 5.

Un nombre est donc décimal si et seulement si il peut s'écrire sous la forme : $\frac{a}{10}$ ou $\frac{a}{5^p}$ ou $\frac{a}{2^k}$ ou $\frac{a}{2^k \times 5^p}$

Propriété : tout nombre entier est un décimal, ainsi si a est un nombre entier on peut écrire $a = \frac{10a}{10}$, exemple $9 = \frac{90}{10}$

V. Nombres irrationnels

Nombre n'étant pas rationnel et donc ne pouvant s'écrire sous la forme d'une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont des entiers.

VI. Reconnaître les rationnels et les irrationnels grâce à l'écriture à virgule

- **Nombres rationnels non décimaux** : la partie décimale possède une infinité périodique de chiffres.

Exemple : 13,542542542542…

- **Nombre rationnels décimaux** : la partie décimale possède un nombre fini de chiffres.

Exemple : 17,896

- **Nombres irrationnels** : la partie décimale possède une infinité non périodique de chiffres.

Exemple : 31,01001000100001…

Cas particulier important : les nombres écrits sous la formes a,999999…, a un nombre entier naturel sont égaux à a + 1

Soit $n = a{,}9999999999\ldots$

Donc $n = a + 0{,}999999999\ldots$

Alors $10n = 10a + 0{,}99999999999\ldots.$

Par conséquent $10n - n = 10a + 9.999999\ldots. - a - 0.999999\ldots.$

Soit $9n = 9a + 9 = 9\,(a+1)$ et donc $n = a+1$

VII. Ecriture scientifique d'un nombre

Ecriture d'un nombre sous la forme $a \times 10^n$ avec $1 \leq a < 10$ et n entier relatif.

<u>**Rappel :**</u> pour n entier positif, 10^n est un 1 suivi de n zéros et pour n entier négatif, 10^n est un 1 précédé de n zéros.

Exemple : $10^7 = 10\,000\,000$ $\quad 10^{-4} = 0{,}001$

Numération de position

❖ Généralités :

La numération est la science **qui permet de représenter, lire et écrire les nombres entiers**. On distingue numération écrite et parlée. Un système de numération se compose d'un alphabet (chiffres, symboles) et d'un code (ensemble de règles).

❖ Systèmes anciens (Antiquité) :

- **Système grec** : pas de zéro, système ordinal et additif. Les nombres sont représentés par les lettres de l'alphabet.
- **Système Egyptien** : pas de zéro, système à base 10 (1 symbole pour chaque puissance de 10), système cardinal additif. Représentation par 7 hiéroglyphes (de 1 à 1 000000). **On ne peut pas juxtaposer plus de 9 chiffres identiques** car on obtient l'unité supérieure.
- **Système romain** : pas de zéro, alphabet composé de 7 chiffres, système cardinal additif et soustractif. On commence par les unités les plus grandes, **interdiction de juxtaposer plus de 4 chiffres identiques sauf pour le mille** (M).

❖ Système de numération à base

a) Numération décimale

- Système qui permet d'écrire tous les entiers naturels contrairement aux systèmes précédents. Utilisation de 10 symboles : 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9.
- Décomposition canonique : décomposition d'un nombre en chacune des unités.

Exemple :

5627 : 7 unités simples, 2 dizaines, 6 centaines, et 5 milliers.
$5627=5000+600+20+7$
$5627= 5\times1000+6\times100+2\times10+7$
$5627= 5\times 10^3+6\times 10^2+2\times 10^1+7\times 10^0$

- Ecriture d'un nombre en base 10 : pour un nombre à 4 chiffres

$\overline{abcd}$ ou $\overline{mcdu} = 10^3\times m+10^2\times c+10^1\times d+u$

b) Système de position à base n (≥ 2)

- Principe identique à celui de la base 10. Au lieu de faire des paquets de 10 éléments on fait des paquets de n éléments. Dans le système à base n les chiffres utilisés sont inférieurs à n.

Exemples :

- en base 2 les chiffres sont 0 et 1
- en base 4 les chiffres sont 0,1,2 et 3

- Ecriture générale d'un nombre en base n

Dans un système de numération en base n (n entier et supérieur à 2), tout nombre s'écrit sous la forme $abcd_n$ dont a, b, c et d sont tous inférieurs à n.